

1.2. Deducción natural

1.2.1. Consecuencia lógica

En la sección anterior definimos cuándo un argumento es válido: toda valuación que hace verdaderas sus premisas debe hacer verdadera su conclusión. La noción de consecuencia lógica da un nombre y una notación a esta relación entre premisas y conclusión.

Definición. Sean $P_1, P_2, \dots, P_k$ fórmulas proposicionales y sea C otra fórmula. Diremos que C es una *consecuencia lógica* de $P_1, P_2, \dots, P_k$ si el argumento con esas premisas y conclusión C es válido. Usaremos la notación

$$\{P_1, P_2, \dots, P_k\} \models C,$$

para denotar que C es consecuencia lógica de $P_1, P_2, \dots, P_k$.

Por la definición de argumento válido, $\{P_1, P_2, \dots, P_k\} \models C$ significa que toda valuación que hace verdaderas simultáneamente las premisas también hace verdadera la conclusión. Además, por la caracterización vista en la sección anterior,

$$\{P_1, P_2, \dots, P_k\} \models C \quad \text{si y solo si} \quad (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C \text{ es una tautología.}$$

Ejemplo. Consideremos el argumento clásico conocido como *modus ponens*. Su estructura formal es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Premisa 1: } p \rightarrow q \\ \text{Premisa 2: } p \\ \hline \text{Conclusión: } q \end{array}$$

En la notación que acabamos de introducir, queremos verificar que

$$\{p \rightarrow q, p\} \models q.$$

Veamos todas las valuaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$	p	q
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

La última fila es la única en que ambas premisas son verdaderas, y en ella la conclusión q también es verdadera. Por lo tanto, q es consecuencia lógica de $p \rightarrow q$ y p , de modo que el argumento es válido.

Notemos que analizamos la validez de modus ponens chequeando esencialmente todas las valuaciones posibles de p y q . Si bien esta técnica es útil, se vuelve rápidamente impráctica a medida que el número de variables proposicionales aumenta. Por ejemplo, con sólo 5 variables proposicionales, ya tendríamos que evaluar $2^5 = 32$ valuaciones, y con 10 variables tendríamos que evaluar $2^{10} = 1024$ valuaciones.

Para superar esto, hablaremos del sistema de *deducción natural*, el cual nos permite construir demostraciones formales de manera puramente sintáctica y estructurada. La idea central emula el proceso de razonamiento deductivo que aplicamos intuitivamente en matemáticas.

Definición (Deducción natural). La *deducción natural* es un sistema formal basado en reglas sintácticas en el que una demostración es una secuencia estructurada de fórmulas. Cada línea es una premisa, un supuesto temporal o una fórmula obtenida desde líneas anteriores que se encuentran activas mediante una regla de inferencia. Un supuesto temporal abre una subdemostración indentada: sus líneas pueden usarse dentro de ese bloque, pero dejan de estar disponibles cuando el bloque se cierra y el supuesto se descarga. La demostración concluye cuando la conclusión aparece fuera de toda subdemostración todavía abierta.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, escribiremos $\Gamma \vdash \alpha$ para indicar que existe una demostración de α por deducción natural a partir de las premisas en Γ .

Conjunción

De manera intuitiva, imagina que empíricamente constatamos que “Hoy es jueves” (α) y, por otro lado, sabemos que “Está soleado” (β). Resulta completamente natural deducir la frase conjunta “Hoy es jueves y está soleado” ($\alpha \wedge \beta$). Al revés, si nuestro punto de partida es la frase compuesta “Hoy es jueves y está soleado”, es lógico poder extraer cualquiera de los dos hechos aislados como una verdad por sí misma.

Inferencia ($\wedge$ -introducción). Si hemos demostrado α y β por separado, entonces podemos concluir $\alpha \wedge \beta$.

Formalmente esto se representa como $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$, o

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Inferencia ($\wedge$ -eliminación). Si hemos demostrado $\alpha \wedge \beta$, entonces podemos concluir α y también podemos concluir β .

Para representar esta regla de forma compacta escribimos: $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$ y $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta$. De forma gráfica, la eliminación de la conjunción se ve como

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Doble Negación

Tenemos las siguientes reglas de introducción y eliminación de la doble negación.

Inferencia ($\neg\neg$ -introducción). Si hemos demostrado α , entonces podemos concluir $\neg\neg\alpha$.

Formalmente, $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$; gráficamente,

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Inferencia ($\neg\neg$ -eliminación). Si hemos demostrado $\neg\neg\alpha$, entonces podemos concluir α .

Formalmente, $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$; gráficamente,

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Ejemplo. Usemos las reglas que conocemos hasta ahora para demostrar formalmente que el siguiente argumento es válido:

Premisa 1: El perro ladra.

Premisa 2: El gato maulla.

Conclusión: Es falso que el gato no maulla y es falso que el perro no ladra.

Asignemos las siguientes variables proposicionales para limpiar el lenguaje natural:

- P : El perro ladra.
- G : El gato maulla.

Luego, el argumento cobra la siguiente estructura formal:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Premisa 1: } P \\ \text{Premisa 2: } G \end{array}}{\text{Conclusión: } \neg\neg G \wedge \neg\neg P}$$

Demostremos la validez del argumento utilizando deducción natural. Acumularemos las fórmulas enumeradas paso a paso, justificando la operación empleada. Una vez que construyamos sintácticamente la conclusión, habremos presentado un argumento legítimo, sin necesidad de tablas de verdad.

1. P (Premisa 1)
2. G (Premisa 2)
3. $\neg\neg P$ ($\neg\neg$ -introducción, aplicada a 1)
4. $\neg\neg G$ ($\neg\neg$ -introducción, aplicada a 2)
5. $\neg\neg G \wedge \neg\neg P$ ($\wedge$ -introducción, utilizando 4 y 3)

Implicancia

Para comprender la intuición detrás de la implicancia, pensemos en la introducción como el acto de razonar hipotéticamente. Si propongo el experimento mental “Supongamos que me gano la lotería” (α), y logro deducir “Me compraré un auto” (β), he demostrado un hecho incondicional “Si me gano la lotería, entonces me compraré un auto” ($\alpha \rightarrow \beta$). El Modus Ponens o eliminación, en cambio, es la ejecución de la garantía: sé empíricamente que “Si gano, compraré el auto”, y si el hecho “Gané la lotería” se concreta, concluyo que “Compraré el auto”.

Inferencia ($\rightarrow$ -eliminación o Modus Ponens). Si hemos demostrado $\alpha \rightarrow \beta$ y también hemos demostrado la condición α , entonces podemos concluir β .

Formalmente, la eliminación de la implicancia se representa como: $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$. De manera gráfica:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}.$$

La regla de introducción de la implicancia es más sutil pues requiere del concepto de *descarga de premisas*. La *descarga de premisas* nos permite hacer un supuesto temporal en el proceso de demostración.

De manera intuitiva, hacer un supuesto en deducción natural es como abrir una subdemostración. Durante ese bloque indentado, asumimos que una fórmula α es verdadera a modo de hipótesis de trabajo. Todo lo que deduzcamos allí vive estrictamente condicionado a α . Sin embargo, esta subdemostración no queda abierta indefinidamente: la cerramos cuando concluimos β y obtenemos la fórmula incondicional $\alpha \rightarrow \beta$. Al cerrar el bloque, el supuesto α queda *descargado*, es decir, ya no es una hipótesis activa para el resto de la demostración.

Formalmente, tenemos la regla de introducción de la implicancia.

Inferencia ($\rightarrow$ -introducción). Si, asumiendo una hipótesis temporal α , logramos demostrar sintácticamente β , entonces podemos descargar dicha hipótesis para concluir la fórmula incondicional $\alpha \rightarrow \beta$.

Gráficamente, la introducción de la implicancia se representa como

$$\frac{\begin{array}{l} \alpha \quad \text{(supuesto temporal)} \\ \vdots \\ \beta \quad \text{(conclusión temporal)} \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}$$

Ejemplo. Veamos la validez de la transitividad de la implicancia, es decir, que si $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \gamma$, entonces $\alpha \rightarrow \gamma$. Formalmente, queremos demostrar que $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.

1. $\alpha \rightarrow \beta$ (Premisa)
2. $\beta \rightarrow \gamma$ (Premisa)
3. α (Supuesto temporal para preparar la $\rightarrow$ -introducción)
4. β ($\rightarrow$ -eliminación, utilizando 1 y 3)
5. γ ($\rightarrow$ -eliminación, utilizando 2 y 4)
6. $\alpha \rightarrow \gamma$ ($\rightarrow$ -introducción, utilizando el bloque 3-5)

Al salir de la indentación en el paso 6, el supuesto α queda formalmente descargado e inactivo para el resto de la demostración (si es que hubiera).

Disyunción

La introducción de la disyunción nos permite combinar afirmaciones demostradas con algunas sin demostrar. Por ejemplo si “Tengo un perro” es una afirmación demostrada, entonces añadir alternativas mediante la frase “Tengo un perro o tengo un dragón” genera una proposición demostrada.

La eliminación de la disyunción codifica el razonamiento por casos. Supongamos que sé de antemano que “El ladrón escapó por la puerta o por la ventana”. Examinó el caso de la puerta (Supuesto 1) y concluyo lógicamente que “Dejó huellas de barro”. Luego, descargo ese caso, examino el caso de la ventana (Supuesto 2) y derivó también que “Dejó huellas de barro”. Como agotamos todas las opciones de la disyunción y ambas rutas convergen a lo mismo, podemos concluir incondicionalmente que “El ladrón dejó huellas de barro”.

Inferencia ($\vee$ -introducción). Si hemos demostrado α , entonces podemos concluir la disyunción $\alpha \vee \beta$ adjuntando cualquier fórmula arbitraria β . De manera simétrica, si hemos demostrado β , podemos concluir $\alpha \vee \beta$.

La introducción de la disyunción se anota: $\{\alpha\} \vdash \alpha \vee \beta$ y $\{\beta\} \vdash \alpha \vee \beta$. De manera gráfica, tenemos:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

La $\vee$ -eliminación es un poco más compleja, pues nuevamente requiere la descarga de premisas.

Inferencia ($\vee$ -eliminación). Si hemos demostrado $\alpha \vee \beta$, y mediante subdemostraciones independientes probamos que una conclusión objetivo γ se sigue tanto si asumimos temporalmente α como si asumimos temporalmente β , entonces podemos concluir γ .

De manera gráfica, la eliminación de la disyunción se representa como

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \alpha \quad (\text{supuesto temporal}) \\ \vdots \\ \gamma \quad (\text{conclusión temporal}) \\ \beta \quad (\text{supuesto temporal}) \\ \vdots \\ \gamma \quad (\text{conclusión temporal}) \end{array}}{\gamma}$$

Ejemplo. Demostremos una familiar desde la lógica $\{p \wedge (q \vee r)\} \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (la propiedad distributiva).

1. $p \wedge (q \vee r)$ (Premisa principal)
2. p ($\wedge$ -eliminación aplicada a 1)
3. $q \vee r$ ($\wedge$ -eliminación aplicada a 1)

4. q (Supuesto temporal: Caso 1 de la disyunción)
5. $p \wedge q$ ($\wedge$ -introducción con 2 y 4)
6. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\vee$ -introducción en 5)
7. r (Supuesto temporal: Caso 2 de la disyunción)
8. $p \wedge r$ ($\wedge$ -introducción combinando 2 y 7)
9. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\vee$ -introducción en 8)
10. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\vee$ -eliminación, utilizando los bloques 4-6 y 7-9)

Contradicción

En una derivación usaremos el símbolo $\perp$ para indicar una contradicción, es decir, una fórmula que es falsa bajo cualquier valuación. Asociadas a este símbolo tenemos las siguientes reglas de inferencia.¹

Inferencia ($\perp$ -introducción). Si hemos demostrado $\alpha \wedge \neg\alpha$, entonces podemos concluir $\perp$.

Inferencia ($\perp$ -eliminación). Si hemos demostrado $\perp$, entonces podemos concluir cualquier fórmula α .

La reducción al absurdo permite demostrar $\neg\alpha$ suponiendo temporalmente α y llegando a una contradicción.

Inferencia (Reducción al absurdo). Si al suponer temporalmente α llegamos a $\perp$, entonces podemos descargar el supuesto y concluir $\neg\alpha$.

Gráficamente, las tres reglas se representan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\alpha \wedge \neg\alpha}{\perp} \quad \frac{\perp}{\alpha} \quad \frac{\begin{array}{c} \alpha \quad (\text{supuesto temporal}) \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\alpha}
 \end{array}$$

Ejemplo. Probemos el silogismo disyuntivo $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\} \vdash \beta$ utilizando el principio de explosión.

1. $\alpha \vee \beta$ (Premisa)
2. $\neg\alpha$ (Premisa)
3. α (Supuesto temporal: caso 1 de la disyunción)
4. $\alpha \wedge \neg\alpha$ ($\wedge$ -introducción, utilizando 3 y 2)
5. $\perp$ ($\perp$ -introducción, en 4)

¹En otras presentaciones, $\perp$ -introducción se denomina también *eliminación de la negación*, mientras que $\perp$ -eliminación se conoce como *principio de explosión*.

6. β ($\perp$ -eliminación, en 5)
7. β (Supuesto temporal: caso 2 de la disyunción)
8. β ($\vee$ -eliminación, utilizando los bloques 3–6 y 7)

1.2.2. Correctitud y completitud de la deducción natural

Hay una pregunta natural para sistemas de demostración como la deducción natural: ¿cómo se relaciona nuestra capacidad sintáctica de derivar símbolos, denotada por $\vdash$, con la semántica, denotada por $\models$? Esto tiene que ver con la correctitud y completitud de la deducción natural para la lógica proposicional.

La *correctitud* de un sistema de demostración establece que el sistema no prueba nada que no sea cierto en términos semánticos. Esto se cumple para el sistema de deducción natural en la lógica proposicional, como afirma el siguiente teorema.

Teorema (Correctitud). Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas y sea ϕ una fórmula bien formada. Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

Este hecho no es complejo de demostrar via inducción, uno puede probar que cada regla de deducción natural preserva la verdad semántica (vía tablas de verdad, por ejemplo) y luego aplicar inducción sobre la longitud de la demostración.

La *completitud*, por otra parte, es una propiedad bastante más compleja. Un sistema de demostración es completo si permite derivar toda consecuencia semántica: siempre que $\Gamma \models \phi$, también se cumple $\Gamma \vdash \phi$. En el caso de la deducción natural para la lógica proposicional, también se cumple esta propiedad.

Teorema (Completitud). Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas y sea ϕ una fórmula bien formada. Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

La demostración de la completitud es más técnica y se escapa de los contenidos del curso. Notemos que la correctitud y la completitud juntas implican que $\Gamma \vdash \phi$ si y sólo si $\Gamma \models \phi$, es decir, que la deducción natural es un sistema de demostración completo y correcto para la lógica proposicional: podemos derivar de manera correcta todas las consecuencias lógicas de un conjunto de premisas.

1.2.3. Ejercicios

1. Demuestre las siguientes reglas de inferencia via deducción natural.
 - (a) $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$.
 - (b) $\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta\} \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \delta)$.
 - (c) $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma\} \vdash \beta \vee \gamma$.
2. Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas. Diremos que Γ es *(sintácticamente) inconsistente* si $\Gamma \vdash \perp$, y *(sintácticamente) consistente* en caso contrario.

- (a) Considere el conjunto

$$\Gamma_0 = \{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg r \wedge \neg s\}.$$

Muestre que Γ_0 es inconsistente.

- (b) Demuestre que Γ es inconsistente si y solo si $\Gamma \vdash \phi$ para toda fórmula ϕ .
- (c) Sea ϕ una fórmula bien formada. Demuestre que $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente si y sólo si $\Gamma \vdash \neg\phi$.
- (d) Si Γ es consistente, demuestre que al menos uno de los conjuntos $\Gamma \cup \{\phi\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente. ¿Debe ser exactamente uno? Justifique su respuesta.

3. El objetivo de este ejercicio es demostrar el *teorema de compacidad* para la lógica proposicional. Sea Γ un conjunto, posiblemente infinito, de fórmulas bien formadas.

- (a) ¿Qué significa que $\Gamma \vdash \phi$ para una fórmula ϕ cuando Γ es infinito?
- (b) Demuestre que, si $\Gamma \vdash \phi$, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \phi$.
- (c) Deduzca que, si $\Gamma \models \phi$, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models \phi$.
Indicación: use la correctitud y completitud de la deducción natural.
- (d) Diremos que Γ es *satisfacible* si existe una valuación que hace verdaderas a todas las fórmulas en Γ . Demuestre que Γ es satisfacible si y sólo si $\Gamma \not\vdash \perp$.
- (e) Concluya el teorema de compacidad: un conjunto Γ de fórmulas es satisfacible si y sólo si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible.