

1.1. Proposiciones y argumentos

Definición. Una *proposición* es un enunciado declarativo que sin ambigüedad es verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Definición. Dadas p y q proposiciones, definimos las siguientes proposiciones compuestas:

- La *negación* $\neg p$ es verdadera si y solo si p es falsa.
- La *conjunción* $p \wedge q$ es verdadera si y solo si p y q son ambas verdaderas.
- La *disyunción* $p \vee q$ es verdadera si y solo si al menos una entre p y q es verdadera, incluyendo el caso en que ambas lo son.
- La *implicancia* $p \rightarrow q$ es falsa si y solo si p es verdadera y q es falsa.
- La *equivalencia* $p \leftrightarrow q$ es verdadera si y solo si p y q tienen el mismo valor de verdad.

Definición. Las *fórmulas bien formadas* (FBF) se definen recursivamente de la siguiente manera:

- Si p es una variable proposicional, entonces p es una FBF.
- Si α y β son FBF, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ y $(\alpha \rightarrow \beta)$ son FBF.

Definición. Sean $p_1, \dots, p_n$ variables proposicionales. Una función $f: A \rightarrow B$ asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B . Una *valuación* de $\{p_1, \dots, p_n\}$ es una función $v: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ que asocia un valor de verdad a cada variable proposicional.

Definición. Sean $p_1, \dots, p_n$ variables proposicionales, sea $v: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ una valuación y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de FBF cuyas variables pertenecen a $\{p_1, \dots, p_n\}$. La *extensión de la valuación* v es la función $\hat{v}: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ definida recursivamente por

$$\begin{aligned} \hat{v}(p) &= v(p) && \text{para cada } p \in \{p_1, \dots, p_n\}, \\ \hat{v}(\neg\alpha) &= 1 - \hat{v}(\alpha), \\ \hat{v}(\alpha \wedge \beta) &= \min\{\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}, \\ \hat{v}(\alpha \vee \beta) &= \max\{\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}, \\ \hat{v}(\alpha \rightarrow \beta) &= \max\{1 - \hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}. \end{aligned}$$

Definición. Sea α una FBF. Diremos que α es una *tautología* si, para toda valuación v de las variables de α , tenemos $\hat{v}(\alpha) = 1$. Diremos que α es una *contradicción* si, para toda valuación v de las variables de α , tenemos $\hat{v}(\alpha) = 0$.

Definición. Un *argumento* consiste en fórmulas $P_1, \dots, P_n$, llamadas *premisas*, y una fórmula C , llamada *conclusión*. El argumento es *válido* si toda valuación que hace verdaderas todas las premisas también hace verdadera la conclusión; es decir, si para toda valuación v ,

$$\hat{v}(P_1) = \dots = \hat{v}(P_n) = 1 \implies \hat{v}(C) = 1.$$

1.1.5. Ejercicios

1. Considere el argumento

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \\ r \end{array}$$

Demuestre que el argumento es válido. ¿Puede eliminar algunas de las premisas y mantener la validez del argumento? Justifique.

2. Considere un sistema de despliegue de software con las siguientes proposiciones:

- S : el despliegue satisface las condiciones de seguridad;
- R : la infraestructura requerida está disponible;
- E : un administrador emite una autorización de emergencia;
- Q : se alcanza el quórum de aprobaciones automáticas;
- D : el despliegue se ejecuta.

Las reglas del sistema son:

R1. Las condiciones de seguridad e infraestructura se cumplen si y solo si existe autorización de emergencia o se alcanza el quórum.

R2. Si se alcanza el quórum, el despliegue se ejecuta.

R3. Si existe autorización de emergencia, el despliegue se ejecuta.

- (a) Escriba las tres reglas como fórmulas proposicionales.
- (b) ¿Son consistentes las reglas con un despliegue ejecutado que no satisface las condiciones de seguridad? Justifique.
- (c) Demuestre que las reglas implican

$$S \wedge R \rightarrow D.$$

3. El operador *NOR*, denotado por $\downarrow$, se interpreta como “ni α ni β ”; es decir, $\alpha \downarrow \beta$ es verdadera exactamente cuando α y β son ambas falsas.

- (a) Defina inductivamente la sintaxis de las fórmulas construidas usando únicamente variables proposicionales, paréntesis y el operador $\downarrow$.

- (b) Extienda una valuación v a estas fórmulas mediante una definición recursiva. Dé la regla para $\hat{v}(\alpha \downarrow \beta)$ tanto en palabras como usando una expresión.
- (c) ¿El lenguaje que usa solamente $\downarrow$ es más expresivo, menos expresivo o igual de expresivo que la lógica proposicional que usa $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$? Justifique.