

1.2. Deducción natural

Definición. Sean $P_1, P_2, \dots, P_k$ fórmulas proposicionales y sea C otra fórmula. Diremos que C es una *consecuencia lógica* de $P_1, P_2, \dots, P_k$ si el argumento con esas premisas y conclusión C es válido. Usaremos la notación

$$\{P_1, P_2, \dots, P_k\} \models C,$$

para denotar que C es consecuencia lógica de $P_1, P_2, \dots, P_k$.

Definición (Deducción natural). La *deducción natural* es un sistema formal basado en reglas sintácticas en el que una demostración es una secuencia estructurada de fórmulas. Cada línea es una premisa, un supuesto temporal o una fórmula obtenida desde líneas anteriores que se encuentran activas mediante una regla de inferencia. Un supuesto temporal abre una subdemostración indentada: sus líneas pueden usarse dentro de ese bloque, pero dejan de estar disponibles cuando el bloque se cierra y el supuesto se descarga. La demostración concluye cuando la conclusión aparece fuera de toda subdemostración todavía abierta.

Inferencia ($\wedge$ -introducción). Si hemos demostrado α y β por separado, entonces podemos concluir $\alpha \wedge \beta$.

Inferencia ($\wedge$ -eliminación). Si hemos demostrado $\alpha \wedge \beta$, entonces podemos concluir α y también podemos concluir β .

Inferencia ($\neg\neg$ -introducción). Si hemos demostrado α , entonces podemos concluir $\neg\neg\alpha$.

Inferencia ($\neg\neg$ -eliminación). Si hemos demostrado $\neg\neg\alpha$, entonces podemos concluir α .

Inferencia ($\rightarrow$ -eliminación o Modus Ponens). Si hemos demostrado $\alpha \rightarrow \beta$ y también hemos demostrado la condición α , entonces podemos concluir β .

Inferencia ($\rightarrow$ -introducción). Si, asumiendo una hipótesis temporal α , logramos demostrar sintácticamente β , entonces podemos descargar dicha hipótesis para concluir la fórmula incondicional $\alpha \rightarrow \beta$.

Inferencia ($\vee$ -introducción). Si hemos demostrado α , entonces podemos concluir la disyunción $\alpha \vee \beta$ adjuntando cualquier fórmula arbitraria β . De manera simétrica, si hemos demostrado β , podemos concluir $\alpha \vee \beta$.

Inferencia ($\vee$ -eliminación). Si hemos demostrado $\alpha \vee \beta$, y mediante subdemostraciones independientes probamos que una conclusión objetivo γ se sigue tanto si asumimos temporalmente

α como si asumimos temporalmente β , entonces podemos concluir γ .

Inferencia ($\perp$ -introducción). Si hemos demostrado $\alpha \wedge \neg\alpha$, entonces podemos concluir $\perp$.

Inferencia ($\perp$ -eliminación). Si hemos demostrado $\perp$, entonces podemos concluir cualquier fórmula α .

Inferencia (Reducción al absurdo). Si al suponer temporalmente α llegamos a $\perp$, entonces podemos descargar el supuesto y concluir $\neg\alpha$.

Teorema (Correctitud). Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas y sea ϕ una fórmula bien formada. Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

Teorema (Completitud). Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas y sea ϕ una fórmula bien formada. Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

1.2.1. Ejercicios

1. Demuestre las siguientes reglas de inferencia via deducción natural.

- (a) $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$.
- (b) $\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta\} \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \delta)$.
- (c) $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma\} \vdash \beta \vee \gamma$.

2. Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas. Diremos que Γ es *(sintácticamente) inconsistente* si $\Gamma \vdash \perp$, y *(sintácticamente) consistente* en caso contrario.

(a) Considere el conjunto

$$\Gamma_0 = \{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg r \wedge \neg s\}.$$

Muestre que Γ_0 es inconsistente.

- (b) Demuestre que Γ es inconsistente si y solo si $\Gamma \vdash \phi$ para toda fórmula ϕ .
- (c) Sea ϕ una fórmula bien formada. Demuestre que $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente si y sólo si $\Gamma \vdash \neg\phi$.
- (d) Si Γ es consistente, demuestre que al menos uno de los conjuntos $\Gamma \cup \{\phi\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente. ¿Debe ser exactamente uno? Justifique su respuesta.

3. El objetivo de este ejercicio es demostrar el *teorema de compacidad* para la lógica proposicional. Sea Γ un conjunto, posiblemente infinito, de fórmulas bien formadas.

- (a) ¿Qué significa que $\Gamma \vdash \phi$ para una fórmula ϕ cuando Γ es infinito?
- (b) Demuestre que, si $\Gamma \vdash \phi$, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \phi$.

- (c) Deduzca que, si $\Gamma \models \phi$, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models \phi$.

Indicación: use la correctitud y completitud de la deducción natural.

- (d) Diremos que Γ es *satisfacible* si existe una valuación que hace verdaderas a todas las fórmulas en Γ . Demuestre que Γ es satisfacible si y sólo si $\Gamma \not\models \perp$.
- (e) Concluya el teorema de compacidad: un conjunto Γ de fórmulas es satisfacible si y sólo si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible.