

1.3. Equivalencia, expresividad y satisfacibilidad

Definición. Dos fórmulas proposicionales bien formadas α y β son *equivalentes* si para toda valuación v de sus variables se cumple $\hat{v}(\alpha) = \hat{v}(\beta)$. Denotaremos esto como $\alpha \equiv \beta$.

Proposición (Equivalencias clásicas). Sean α, β, γ fórmulas bien formadas. Tenemos las siguientes equivalencias:

- $\alpha \wedge \top \equiv \alpha$ (Identidad del $\wedge$)
- $\alpha \vee \perp \equiv \alpha$ (Identidad del $\vee$)
- $\alpha \wedge \perp \equiv \perp$ (Anulación del $\wedge$)
- $\alpha \vee \top \equiv \top$ (Anulación del $\vee$)
- $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ (Conmutatividad del $\wedge$)
- $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ (Conmutatividad del $\vee$)
- $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ (Asociatividad del $\wedge$)
- $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (Asociatividad del $\vee$)
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ (Distributividad del $\wedge$ sobre el $\vee$)
- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (Distributividad del $\vee$ sobre el $\wedge$)
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ (De Morgan)
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (De Morgan)
- $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (Caracterización de la implicancia)

Definición. Una fórmula proposicional está en *forma normal disyuntiva* si es una disyunción de conjunciones de variables proposicionales o sus negaciones.

Teorema. Toda función booleana $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ puede ser representada por una fórmula proposicional en forma normal disyuntiva.

Definición. Un conjunto de operadores es *funcionalmente completo* si pueden ser usados para representar cualquier función booleana.

Corolario. El conjunto de operadores $\{\wedge, \vee, \neg\}$ es funcionalmente completo.

Definición. Una fórmula proposicional α es *satisfacible* si existe una valuación v de sus variables tal que $\hat{v}(\alpha) = 1$.

1.3.4. Ejercicios

1. Resuelva los siguientes problemas.

- Demuestre que $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$.
- El operador *NAND*, denotado por $\uparrow$, es tal que $\alpha \uparrow \beta$ es verdadero exactamente cuando “ α y β no son ambos verdaderos”. Demuestre que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.
- Considere la función booleana dada por la tabla

p	q	r	$f(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Construya una fórmula proposicional que represente a f .

- Se debe formar un equipo eligiendo integrantes entre Ana, Bruno, Carla y Diego, sujeto a las siguientes restricciones:
 - al menos uno entre Ana y Bruno debe ser elegido;
 - si Carla es elegida, entonces Diego también debe serlo;
 - Bruno y Carla no pueden ser elegidos simultáneamente;
 - exactamente uno entre Ana y Diego debe ser elegido.

Introduzca variables proposicionales y construya una fórmula Ψ cuyas valuaciones que evalúan a 1 correspondan exactamente a los equipos permitidos.

- Un *literal* es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* si es una conjunción de disyunciones de literales. Demuestre que toda fórmula proposicional ϕ es equivalente a una fórmula en forma normal conjuntiva.

2. El objetivo de esta pregunta es diseñar un solver de *Akari* via SAT-solvers. Puede probar el juego en dailyakari.com.

Un tablero de Akari es una cuadrícula rectangular formada por celdas blancas y negras; algunas celdas negras contienen un número entre 0 y 4. Las lámparas se colocan únicamente en celdas blancas. Cada lámpara ilumina su propia celda y las celdas blancas que encuentra en las cuatro direcciones cardinales, hasta llegar al borde del tablero o a una celda negra. Una solución debe cumplir las siguientes reglas:

- toda celda blanca debe estar iluminada;
- dos lámparas no pueden iluminarse entre sí;
- si una celda negra contiene el número k , entonces exactamente k de sus 4 vecinas deben contener una lámpara.

Las celdas negras sin número no imponen una condición sobre sus vecinas, pero note que bloquean el paso de la luz.

Identifique cada celda con sus coordenadas (i, j) . Sea W el conjunto de celdas blancas y sea N el conjunto de celdas negras numeradas; para cada $b \in N$, denote por $n_b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ el número escrito en b . Diremos que dos celdas blancas distintas u y w se *ven* si pertenecen a una misma fila o columna y todas las celdas estrictamente entre ellas son blancas. Para cada $w \in W$ y cada $b = (i, j) \in N$, defina, respectivamente,

$$V(w) = \{w\} \cup \{u \in W : u \text{ se ve con } w\},$$

$$A(b) = \{(i', j') \in W : |i - i'| + |j - j'| = 1\}.$$

Así, $V(w)$ contiene las celdas desde las cuales una lámpara iluminaría a w , mientras que $A(b)$ contiene las vecinas ortogonales blancas de b .

- (a) ¿Qué variables proposicionales usaría para modelar el problema de Akari?
 - (b) Sea X un conjunto finito de variables proposicionales y sea $k \geq 0$. Construya una fórmula $\text{Exact}_k(X)$ que sea verdadera exactamente cuando k variables de X son verdaderas. Puede usar las convenciones $\bigwedge \emptyset = \top$ y $\bigvee \emptyset = \perp$.
 - (c) Para cada celda negra numerada b , construya una fórmula que exprese que exactamente n_b de sus vecinas contienen una lámpara.
 - (d) Para cada celda blanca w , construya una fórmula que exprese que w está iluminada.
 - (e) Construya una fórmula que impida colocar lámparas en dos celdas blancas que se ven entre sí.
 - (f) Construya una fórmula Φ_A que es satisfacible si y sólo si el tablero de Akari tiene solución. ¿Cómo usaría un SAT-solver para encontrar una solución al tablero de Akari?
3. El objetivo de esta pregunta es demostrar una versión proposicional del *teorema de interpolación de Craig*. Sean α y β fórmulas tales que $\alpha \models \beta$, y suponga que comparten al menos una variable. Denote por

$$P = \{p_1, \dots, p_m\}, \quad Q = \{q_1, \dots, q_k\}, \quad R = \{r_1, \dots, r_\ell\}$$

los conjuntos de variables que aparecen solamente en α , que aparecen en ambas fórmulas y que aparecen solamente en β , respectivamente.

Una fórmula γ es una *interpolación* de α y β si todas sus variables pertenecen a Q y además $\alpha \models \gamma$ y $\gamma \models \beta$.

- (a) Definimos $f: \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$ como $f(x) = 1$ si y solo si existe una valuación w de $P \cup Q$ tal que

$$w(q_i) = x_i \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{y} \quad \hat{w}(\alpha) = 1.$$

Muestre que existe una fórmula γ con variables en Q tal que $\hat{v}(\gamma) = f(v(q_1), \dots, v(q_k))$ para toda valuación v de Q .

- (b) Demuestre que $\alpha \models \gamma$.
- (c) Demuestre que $\gamma \models \beta$. Concluya que γ es una interpolación de α y β .
- (d) Muestre que γ es la consecuencia lógica más fuerte de α que puede expresarse usando solamente las variables compartidas; es decir, si δ es cualquier fórmula construida únicamente con variables de Q y $\alpha \models \delta$, entonces $\gamma \models \delta$.
- (e) Aplique la construcción anterior a

$$\alpha = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r), \quad \beta = q \vee r \vee s.$$

Compruebe primero que $\alpha \models \beta$ y luego construya una interpolación que use solamente las variables q y r .