

1.4. Lógica de predicados

Definición. La *lógica de predicados*, también llamada *lógica de primer orden*, extiende la lógica proposicional con objetos, funciones, predicados y cuantificadores.

Definición. Fijado un *dominio de discurso* D , un *predicado* de aridad n puede pensarse como una función $P: D^n \rightarrow \{0, 1\}$. Un predicado de n argumentos tiene *aridad* n .

Definición. El *cuantificador universal* $\forall$ forma la afirmación

$$\forall x \phi(x) : \quad \text{“para todo objeto } x \text{ del dominio, se cumple } \phi(x)\text{”}.$$

Definición. El *cuantificador existencial* $\exists$ forma la afirmación

$$\exists x \phi(x) : \quad \text{“existe al menos un objeto } x \text{ del dominio para el cual se cumple } \phi(x)\text{”}.$$

Definición. Un *lenguaje de primer orden* $\mathcal{L}$ contiene:

- variables $x, y, z, \dots$;
- símbolos de constante, que sirven para nombrar objetos;
- símbolos de función, cada uno con una aridad fija;
- símbolos de predicado, cada uno con una aridad fija;
- los conectivos lógicos, los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, y los símbolos de puntuación.

Definición. Los *términos* de un lenguaje $\mathcal{L}$ se definen recursivamente:

- toda variable es un término;
- todo símbolo de constante de $\mathcal{L}$ es un término;
- si f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término.

Definición. Las *fórmulas bien formadas* (FBF) de $\mathcal{L}$ se definen recursivamente:

- si P es un símbolo de predicado de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una FBF;
- si t y u son términos, entonces $t = u$ es una FBF;
- si ϕ y ψ son FBF, entonces $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ y $(\phi \rightarrow \psi)$ son FBF;
- si ϕ es una FBF y x es una variable, entonces $\forall x \phi$ y $\exists x \phi$ son FBF.

Definición. En $\forall x \phi$ y $\exists x \phi$, la fórmula ϕ es el *alcance* del cuantificador. Una ocurrencia de x es *ligada* si está dentro del alcance de un cuantificador que la liga; en caso contrario es *libre*. Una fórmula sin variables libres se llama *fórmula cerrada*. Una fórmula con al menos una variable libre se llama *fórmula abierta*.

Definición. Sea ϕ una FBF, x una variable libre de ella y t un término no ligado en ϕ . El *reemplazo* de x por t en ϕ , es la FBF obtenida reemplazando todas las ocurrencias libres de x por t .

Definición. Una *estructura* para un lenguaje de primer orden consiste en escoger un dominio de discurso no vacío y decidir qué objeto nombra cada constante, qué función representa cada símbolo de función y qué propiedad o relación representa cada símbolo de predicado.

Definición. Una fórmula es *satisfacible* si es verdadera para alguna estructura y alguna elección de valores para sus variables libres.

Definición. Una fórmula ψ es una *consecuencia lógica* de un conjunto de fórmulas Γ , lo que escribimos $\Gamma \models \psi$, si toda estructura y toda elección de valores que hacen verdaderas las fórmulas de Γ hacen también verdadera a ψ .

Definición. Dos FBF ϕ y ψ son *lógicamente equivalentes*, lo que escribimos $\phi \equiv \psi$, si tienen el mismo valor de verdad en toda estructura y para toda elección de valores de sus variables libres.

Proposición (Equivalencias de cuantificadores). Para $\phi(x)$ y $\psi(x)$ FBF:

$$\begin{aligned}\neg \forall x \phi(x) &\equiv \exists x \neg \phi(x), \\ \neg \exists x \phi(x) &\equiv \forall x \neg \phi(x), \\ \forall x (\phi(x) \wedge \psi(x)) &\equiv \forall x \phi(x) \wedge \forall x \psi(x), \\ \exists x (\phi(x) \vee \psi(x)) &\equiv \exists x \phi(x) \vee \exists x \psi(x), \\ \forall x \forall y \phi(x, y) &\equiv \forall y \forall x \phi(x, y), \\ \exists x \exists y \phi(x, y) &\equiv \exists y \exists x \phi(x, y).\end{aligned}$$

Ejercicios

1. El dominio contiene personas y computadores. Use los predicados

$$E(x) : \text{"}x \text{ es estudiante de esta clase"}, \quad C(x) : \text{"}x \text{ es un computador"},$$

y $H(x, y)$: “ x ha usado y ”.

- (a) Traduzca las siguientes afirmaciones a FBF de primer orden:

- (I) todo estudiante de esta clase ha usado algún computador;
- (II) existe un computador que todos los estudiantes de esta clase han usado;
- (III) ningún estudiante de esta clase ha usado todos los computadores;
- (IV) cada computador ha sido usado por a lo más un estudiante de esta clase.
- (b) Construya una estructura finita en la que la afirmación (i) sea verdadera y la afirmación (ii) sea falsa. Explique qué muestra su ejemplo sobre el orden de los cuantificadores.
- (c) En

$$P(x) \wedge \forall x (Q(x, y) \rightarrow \exists z R(y, z)),$$

identifique las ocurrencias libres y ligadas de cada variable, y decida si la fórmula es abierta o cerrada.

- (d) Escriba la negación de las afirmaciones (i) y (ii) como FBF en las que la negación aparezca solamente delante de fórmulas atómicas.

2. Un lector de strings recibe un mensaje $w = w_1 \cdots w_n$, escrito como una palabra no vacía sobre el alfabeto $\{a, b\}$. Podemos ver el mensaje como una estructura $\mathcal{M}_w$ cuyo dominio es el conjunto de posiciones $\{1, \dots, n\}$ y cuyo lenguaje contiene los predicados A , B y $<$, interpretados por

$$A(i) \iff w_i = a, \quad B(i) \iff w_i = b,$$

y por el orden usual entre las posiciones. Así, las variables representan posiciones de la palabra, no sus letras.

- (a) Construya fórmulas abiertas $\text{Primera}(x)$, $\text{Ultima}(x)$ y $\text{Siguiente}(x, y)$ que expresen, respectivamente, que x es la primera posición, que x es la última posición y que y es la posición inmediatamente posterior a x .
- (b) Usando las fórmulas del inciso anterior como abreviaturas, construya una FBF cerrada para cada una de las siguientes propiedades de w :
 - (I) la primera y la última letra son iguales;
 - (II) cada aparición de a está seguida inmediatamente por una b ;
 - (III) todas las apariciones de a están antes que todas las apariciones de b ;
 - (IV) el bloque consecutivo ab aparece exactamente una vez.
- (c) Determine cuáles de las cuatro fórmulas construidas son verdaderas en cada una de las palabras

$$\text{abba}, \quad \text{aabb}, \quad \text{abab}.$$

- (d) Describa exactamente cuáles palabras satisfacen simultáneamente las propiedades (ii) y (iii), y justifique su respuesta.

3. Consideremos estructuras para un lenguaje con un predicado binario E . Podemos ver cada estructura como una red dirigida: $E(x, y)$ indica que x puede enviar directamente un mensaje a y . Ampliamos el lenguaje con constantes s, t que distinguen dos vértices. Una *cadena dirigida de longitud n* de s a t es una sucesión $s = u_0, u_1, \dots, u_n = t$ tal que $E(u_i, u_{i+1})$ para todo $0 \leq i < n$. La *alcanzabilidad* de t desde s afirma que existe una cadena dirigida de alguna longitud positiva, sin fijar esa longitud de antemano. Demostraremos que ninguna FBF de primer orden expresa la alcanzabilidad en todas las redes dirigidas.

- (a) Para cada $n \geq 1$, construya una FBF cerrada $\varphi_n(s, t)$ que sea verdadera exactamente cuando existe una cadena dirigida de longitud n de s a t .
- (b) Suponga, buscando una contradicción, que existe una fórmula $\psi(x, y)$, en el lenguaje que contiene solamente a E , que expresa la alcanzabilidad en todas las redes dirigidas. Considere el conjunto

$$\Gamma = \{\psi(s, t)\} \cup \{\neg\varphi_n(s, t) : n \geq 1\}.$$

Demuestre que Γ no es satisfacible.

- (c) Demuestre que todo subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ es satisfacible.
- (d) Use (sin demostrar) que Γ es satisfacible si y solo si todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles para concluir que la alcanzabilidad no puede expresarse mediante ninguna FBF de primer orden.