

1.5. Inferencia en lógica de predicados

Inferencia ($\forall$ -eliminación). Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$ para cualquier término t que pueda reemplazar a x sin capturar variables.

Inferencia ($\forall$ -introducción). Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si, tomando a como un objeto arbitrario, demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

Inferencia ($\exists$ -introducción). Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.

Inferencia ($\exists$ -eliminación). Supongamos que hemos demostrado $\exists x \phi(x)$. Podemos abrir una subdemostración suponiendo $\phi(a)$ para un parámetro nuevo a . Si obtenemos una conclusión ψ que no menciona a a , podemos descargar el supuesto y concluir ψ . El parámetro a tampoco puede aparecer en la premisa existencial ni en otros supuestos activos.

Inferencia. (Reglas de igualdad) Para términos t, u, v tenemos reglas asociadas a la igualdad vía la reflexividad, simetría, transitividad y el *reemplazo*.

Reem. Si hemos demostrado $t = u$ y $\phi(t)$, podemos concluir $\phi(u)$.

Ejercicios

1. Muestre via deducción natural:

- (a) $\{\neg\neg\exists x P(x)\} \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))$.
- (b) $\{f(a) = b, b = c, R(f(a))\} \vdash R(c) \wedge c = f(a)$.
- (c) $\{P(a), \neg P(a)\} \vdash \exists x Q(x)$.
- (d) $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x(P(x) \wedge R(x)), \forall x((Q(x) \wedge R(x)) \rightarrow S(x))\} \vdash \exists x S(x)$.
- (e) $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))\} \vdash \forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$.
- (f) $\{\exists x P(x), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))\} \vdash \neg\forall x R(x)$.
- (g) $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg\neg(P(x) \vee Q(x)))$.

2. Sea P un predicado unario y usemos $x \neq y$ como abreviatura de $\neg(x = y)$. Definimos

$$\text{Alguno}(P) := \exists x P(x),$$

$$\text{AloMasUno}(P) := \forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y),$$

$$\text{Uno}(P) := \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x)),$$

$$\text{Dos}(P) := \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))).$$

- (a) Explique qué afirma cada fórmula.
 - (b) Demuestre que $\text{Uno}(P)$ es equivalente a $\text{Alguno}(P) \wedge \text{AloMasUno}(P)$.
 - (c) Demuestre $\{\text{Dos}(P)\} \vdash \text{Alguno}(P) \wedge \neg \text{Uno}(P)$. ¿Es verdad la implicación contraria? Justifique su respuesta.
 - (d) ¿Podemos quitar de $\text{Dos}(P)$ el hecho que $x \neq y$? Justifique su respuesta.
 - (e) Construya una estructura que muestre que, sin la cláusula universal final, la fórmula $\text{Dos}(P)$ puede ser verdadera con tres objetos que satisfacen P .
3. Suponga que usted tuviera un sistema de deducción natural para la lógica de predicados donde las reglas de igualdad satisficieran reflexividad y reemplazo.
- (a) Usando solamente Reflexividad y Reemplazo, derive $\{t = u\} \vdash u = t$.
 - (b) Usando solamente Reflexividad y Reemplazo, derive $\{t = u, u = v\} \vdash t = v$.
 - (c) Demuestre $\{t = u\} \vdash f(t) = f(u)$ y generalice a funciones de aridad arbitraria.
 - (d) Para toda fórmula $\varphi(z)$, demuestre

$$\{t = u\} \vdash \varphi(t) \leftrightarrow \varphi(u).$$
 - (e) Pruebe únicamente con Reflexividad, Reemplazo y las reglas lógicas que

$$\vdash \forall x(x = x), \quad \vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x), \quad \vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z).$$
 - (f) ¿Qué puede concluir de los ítems anteriores? Discuta.