

2.1. Técnicas inspiradas en deducción natural

Técnicas de demostración.

- **Implicancias:** demostración directa desde la hipótesis, o por contrarrecíproca partiendo de la negación de la conclusión y llegando a la negación de la hipótesis.
- **Disyunciones:** demostración por casos, verificando la conclusión en cada alternativa.
- **Negaciones:** reescritura en una forma equivalente positiva o demostración por contradicción.
- **Equivalencias:** separación en las dos implicancias o construcción de una cadena de equivalencias.
- **Cuantificadores:** elección de un elemento arbitrario para una afirmación universal, o mostrar un testigo para una afirmación existencial.

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) Para todo $a, b, k \in \mathbb{Z}$, tenemos que a divide a b si y sólo si a divide a $b + ak$.
- b) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $n(n + 1)$ es par.
- c) Si 4 divide a n^2 , entonces n es par.
- d) Para tres conjuntos A, B, C , tenemos que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- e) Si x^2 es irracional, entonces x es irracional.
- f) $\sqrt{3}$ es irracional.
- g) El conjunto de los números racionales positivos no tiene un elemento mínimo.

2. Diremos que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- a) Demuestre que si $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es impar y $f_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es par, entonces $f_i \cdot f_p$ es una función impar.
- b) Demuestre que si f y g son impares, entonces $f + g$ es impar y $f \cdot g$ es par.
- c) Demuestre que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $f(x) + f(-x)$ es una función par.
- d) Demuestre que toda función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puede escribirse como suma de una función par y una impar.
- e) Demuestre que la descomposición de una función en suma de una función par y una impar es única.

3. Una *terna pitagórica* es una terna (a, b, c) de enteros positivos que satisface $a^2 + b^2 = c^2$. Diremos que la terna es *primitiva* si no existe un entero $d > 1$ que divida simultáneamente a a , b y c .

- a) Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que n^2 es congruente con 0 o 1 módulo 4.
- b) Deduzca que ningún cuadrado entero puede escribirse como $4q+2$ con $q \in \mathbb{Z}$ y que, si $4 \mid n^2$, entonces n es par.
- c) Sea (a, b, c) una terna pitagórica. Demuestre por contradicción que a y b no pueden ser ambos impares.
- d) Suponga ahora que la terna es primitiva. Demuestre por contradicción que a y b tampoco pueden ser ambos pares.
- e) Concluya que exactamente uno de a, b es par y demuestre que c es impar.