

3.2. Principio aditivo e inclusión-exclusión

Principio. Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si las alternativas son disjuntas par a par, y
- la tarea T_i se puede realizar de n_i formas.

Entonces, la tarea general se puede realizar de $n_1 + \dots + n_k$ maneras.

Principio. Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos disjuntos par a par. Tenemos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Principio. Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Principio. Sean A, B, C conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Principio. Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|.$$

Acá los índices $i_1, \dots, i_j$ recorren todos los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

Ejercicios

1. a) Una cerradura tiene $n \geq 1$ botones distinguibles. Una acción consiste en presionar un botón o dos botones distintos simultáneamente; en este último caso no se distingue un orden entre los dos botones. Una clave es una lista de $r \geq 1$ acciones. ¿Cuántas claves existen? ¿Cuántas existen si ningún botón puede aparecer en más de una acción?
- b) Hay $n \geq 1$ bugs distintos y n desarrolladores distintos. Cada bug se asigna a un único desarrollador, que puede recibir cualquier cantidad de bugs, incluso cero. Cuente las asignaciones en las que no todos los desarrolladores reciben exactamente un bug.
- c) Se ordenan $n \geq 4$ libros distintos $L_1, \dots, L_n$ en un estante. Cuente los ordenamientos en los que L_2 no queda inmediatamente a la derecha de L_1 y L_4 no queda inmediatamente a la derecha de L_3 .

- d) Para $n \geq 1$, cuente las bolsas de n frutas, elegidas entre manzanas, plátanos, naranjas y peras, que contienen un número par de manzanas, un número impar de plátanos, a lo más una naranja y a lo más una pera. Las frutas de cada tipo son indistinguibles y el orden dentro de la bolsa no importa.

Indicación: considere los casos n par y n impar.

2. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $G = \{0, \dots, a\} \times \{0, \dots, b\}$. Un *camino creciente* es una lista de puntos de G que comienza en $(0, 0)$, termina en (a, b) y en cada paso aumenta una coordenada en 1, dejando la otra fija. Para $P = (u, v)$ y $Q = (s, t)$, escribimos $P \preceq Q$ cuando $u \leq s$ y $v \leq t$. Dos puntos son *incomparables* si no se cumple $P \preceq Q$ ni $Q \preceq P$.

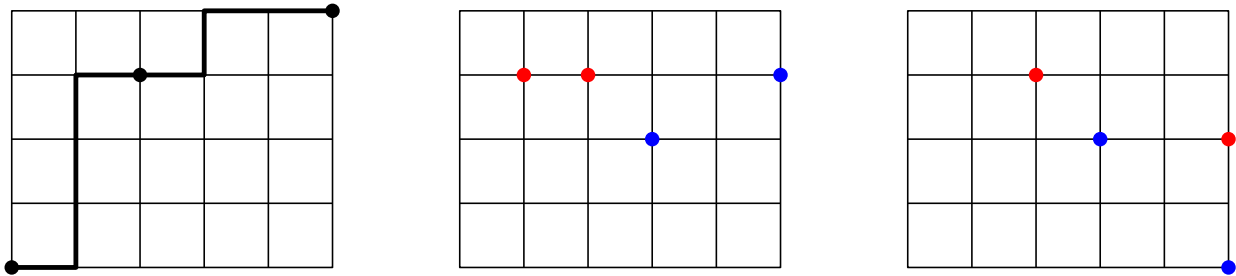


Figura 3.1: Izquierda: un camino creciente de $(0, 0)$ a $(5, 4)$ pasando por $(2, 3)$. Centro: dos pares de puntos comparables (en rojo y azul). Derecha: dos pares de puntos incomparables (en rojo y azul).

- Cuente los caminos crecientes de $(0, 0)$ a (a, b) .
 - Determine cuántos caminos crecientes pasan por un punto fijo $(u, v) \in G$.
 - Sean $P, Q \in G$ distintos. Demuestre que existe un camino creciente que pasa por ambos si y sólo si $P \preceq Q$ o $Q \preceq P$. Obtenga una fórmula para la cantidad de esos caminos en cada caso.
 - Sea $F \subseteq G$ un conjunto de puntos incomparables par a par. Demuestre que un camino creciente pasa por a lo más un punto de F . Deduzca una fórmula para la cantidad de caminos que no pasan por ningún punto de F .
 - Para $n \geq 1$, cuente los caminos crecientes de $(0, 0)$ a $(4n, 4n)$ que no pasan por ninguno de los puntos (n, n) , $(2n, 2n)$ y $(3n, 3n)$.
3. Para enteros positivos $x_1, \dots, x_r$, denotamos por $\gcd(x_1, \dots, x_r)$ su máximo común divisor. Dos enteros son *coprimos* si su máximo común divisor es 1. Para $n \geq 1$, la *función de Euler* es

$$\varphi(n) = |\{x \in \{1, \dots, n\} : \gcd(x, n) = 1\}|,$$

es decir, la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n .

- Sean $p_1, \dots, p_k$ los factores primos distintos de n . Aplique inclusión-exclusión para probar que

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Deduzca que, para $m, n \geq 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ cuando $\gcd(m, n) = 1$.

- b) Sean $N \geq 1$ y $r \geq 2$. Un punto $X = (x_1, \dots, x_r) \in \{1, \dots, N\}^r$ es *visible desde el origen* si no existe $t \in \mathbb{R}$, con $0 < t < 1$, tal que todas las coordenadas de tX sean enteras. Pruebe que esto equivale a $\gcd(x_1, \dots, x_r) = 1$.
- c) Definimos la *función de Möbius*:

$$\mu(d) = \begin{cases} 1, & d = 1, \\ 0, & \text{si algún cuadrado de un primo divide a } d, \\ (-1)^j, & \text{si } d \text{ es producto de } j \text{ primos distintos.} \end{cases}$$

Sea $V_r(N)$ la cantidad de puntos visibles desde el origen en $\{1, \dots, N\}^r$. Muestre, usando inclusión-exclusión, que

$$V_r(N) = \sum_{d=1}^N \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor^r.$$

Concluya también el caso particular $V_2(N) = 2 \sum_{j=1}^N \varphi(j) - 1$.