

1.1. Teoría de la computación

Idea informal. Un *problema de decisión* recibe una instancia, escrita como un string, y responde *sí* o *no*. Como sólo importa en qué instancias la respuesta es *sí*, representamos el problema por el conjunto de sus *instancias positivas*. Ese conjunto de strings es un lenguaje.

1.2. Lenguajes formales

Definición (Alfabetos y strings). Un *alfabeto* Σ es un conjunto finito y no vacío de símbolos. Para cada $k \in \mathbb{N}$, un *string de largo k sobre Σ* es una secuencia

$$w = w_1 w_2 \cdots w_k, \quad w_i \in \Sigma,$$

y Σ^k denota el conjunto de todos esos strings. Existe un único string de largo 0, llamado *string vacío* y denotado por ε ; por lo tanto,

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}.$$

El conjunto de todos los strings sobre Σ es

$$\Sigma^* = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k.$$

Si $w \in \Sigma^*$, denotamos su largo por $|w|$.

Definición (Concatenación y potencias de strings). Sean $x = x_1 \cdots x_n$ e $y = y_1 \cdots y_m$ strings sobre un mismo alfabeto Σ . Su *concatenación* es el string

$$x \cdot y = xy = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m.$$

Las *potencias* de x se definen por

$$x^0 = \varepsilon \quad \text{y} \quad x^k = x^{k-1}x \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Definición (Lenguajes). Sea Σ un alfabeto. Un *lenguaje sobre Σ* es un subconjunto

$$L \subseteq \Sigma^*.$$

Definición (Operaciones booleanas de lenguajes). Sean $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes sobre el

mismo alfabeto. Definimos

$$\begin{aligned} L_1 \cup L_2 &= \{w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ o } w \in L_2\}, \\ L_1 \cap L_2 &= \{w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ y } w \in L_2\}, \\ L_1 \setminus L_2 &= \{w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ y } w \notin L_2\}, \\ L_1^c &= \Sigma^* \setminus L_1 = \{w \in \Sigma^* : w \notin L_1\}. \end{aligned}$$

En la última igualdad, el complemento siempre se toma con respecto a Σ^* .

Definición (Concatenación de lenguajes). Sean $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. La *concatenación* de L_1 y L_2 es el lenguaje

$$L_1 L_2 = \{xy : x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}.$$

Definición (Potencias y estrella de Kleene). Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje. Sus *potencias* se definen recursivamente por

$$L^0 = \{\varepsilon\} \quad \text{y} \quad L^k = L^{k-1} L \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

La *estrella de Kleene* de L es

$$L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k.$$

Ejercicios

- Sea Σ un alfabeto y sean $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ lenguajes. En cada inciso, justifique las igualdades a partir de las definiciones.

a) Demuestre que la concatenación de lenguajes es asociativa:

$$(AB)C = A(BC).$$

b) Demuestre que la concatenación distribuye por ambos lados sobre la unión:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC \quad \text{y} \quad (A \cup B)C = AC \cup BC.$$

c) Demuestre que $\{\varepsilon\}$ es identidad y que $\emptyset$ es anulador para la concatenación; es decir,

$$\{\varepsilon\}A = A = A\{\varepsilon\} \quad \text{y} \quad \emptyset A = \emptyset = A\emptyset.$$

d) Deduzca que

$$A^* = \{\varepsilon\} \cup AA^* = \{\varepsilon\} \cup A^*A.$$

e) ¿Son las siguientes verdad?

$$AB = BA \quad \text{y} \quad (A \cup B)^* = A^* \cup B^*.$$

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido. Un *matching* de G es un conjunto $M \subseteq E$ de aristas que no comparten extremos, y

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ es un matching de } G\}$$

denota la cardinalidad de un matching máximo.

- a) ¿Que problemas modela el problema de matching máximo? ¿Qué aplicaciones podría tener?
 b) Trate de describir el problema de decisión asociado al problema de optimización de matching máximo. (Respuesta al girar la hoja.)

$$\text{MATCHING} = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ es un grafo simple no dirigido, } k \in \mathbb{N} \wedge \nu(G) \geq k \}$$

- c) Suponga que tiene un algoritmo de decisión para MATCHING. ¿Cómo puede usarlo para calcular $\nu(G)$? ¿Cuántas llamadas al algoritmo de decisión realiza su procedimiento?
 d) Una vez conocido $r = \nu(G)$, queremos recuperar un matching de cardinalidad r . ¿Cómo puede usar el algoritmo de decisión para reconstruir un matching máximo? ¿Cuántas llamadas al algoritmo de decisión realiza su procedimiento?
 e) Discuta la relación entre los problemas de decisión, optimización y búsqueda.
3. Sea Σ un alfabeto y sean $A, B \subseteq \Sigma^*$ lenguajes fijos. Considere la ecuación en la incógnita $X \subseteq \Sigma^*$

$$X = AX \cup B.$$

- a) Demuestre que A^*B es una solución de la ecuación. Demuestre además que, si X es cualquier solución, entonces

$$A^*B \subseteq X.$$

En otras palabras, A^*B es la menor solución respecto de la inclusión.

- b) Suponga que $\varepsilon \notin A$. Demuestre que la ecuación tiene una única solución. Para ello, pruebe mediante inducción fuerte sobre $|w|$ que toda solución X está contenida en A^*B .
 c) Muestre que la hipótesis $\varepsilon \notin A$ no puede omitirse en general.
 d) El resultado de los incisos anteriores se conoce como el *lema de Arden*. Enúncielo en una sola frase, distinguiendo claramente la existencia de una solución mínima de la condición que garantiza unicidad.
 e) Resuelva por sustitución el siguiente sistema de ecuaciones de lenguajes sobre $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$X = \{0\}X \cup \{1\}Y \cup \{\varepsilon\}, \quad Y = \{0\}X \cup \{1\}.$$

Entregue expresiones para X e Y usando únicamente lenguajes finitos, unión, concatenación y estrella de Kleene. Demuestre que la solución es única y describa verbalmente los strings que pertenecen a X .